

配方法与特征值法化二次型为标准形

对比项目	配方法	特征值法（正交变换法）
基本原理	通过配方将二次型化为完全平方和，对应一个可逆线性变换（不要求正交变换）。"	实对称矩阵可正交对角化，标准形的系数即为二次型矩阵的全部特征值。
主要步骤	若含平方项，直接配方；若无平方项，先作可逆线性变换（如 $x_1=y_1+y_2$; $x_2=y_1-y_2$）产生平方项，再配方；写出可逆变换矩阵（非正交）。 注意：必须验证每步变换都是非退化的。	1. 写出二次型的矩阵 A（实对称）；2. 计算 A 的全部特征值 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$；3. 求对应正交单位特征向量，构成正交矩阵 Q；4. 作正交变换 $x=Qy$，得标准形 $\sum \lambda_i y_i^2$。
标准形形式	$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_n y_n^2$ ，系数 d_i 不一定是特征值，但惯性指数（正负个数）唯一。	$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ ，系数为特征值。
变换矩阵性质	可逆线性变换（一般非正交，不保持长度和夹角）。	正交变换（保持长度、内积，几何上为旋转/反射）。
惯性指数确定	通过看最后平方项系数的符号（或配方法后单独计	直接由特征值的正负个数得到。

	算符号差)	
二次型分类 (正定、负定等)	1. 标准形系数全正 $\Leftrightarrow$ 正定; 2. 标准形系数全负 $\Leftrightarrow$ 负定; 3. 标准形系数有正有负 $\Leftrightarrow$ 不定; 4. 有零且其余同号 $\Leftrightarrow$ 半定。	1. 特征值全正 $\Leftrightarrow$ 正定; 2. 特征值全负 $\Leftrightarrow$ 负定; 3. 特征值有正有负 $\Leftrightarrow$ 不定; 4. 特征值有零且其余同号 $\Leftrightarrow$ 半定。
计算复杂度 (手算)	对低阶 ($n \leq 3$) 非常快捷; 高阶配方容易出错, 但无需解特征方程。	需求特征多项式、解特征方程、求特征向量并正交化; $n \geq 3$ 时计算量大幅增加。
优点	1. 只涉及代数运算 (加、乘), 理论简单 2. 不用解高次方程, 数值稳定 (手算); 3. 直接得到一个可逆变换。"	1. 变换具有几何意义 (保距变换); 2. 标准形系数就是特征值, 可直接用于谱分析; 3. 标准化后变量相互独立 (概率论、振动分析中有优势)。"
缺点	1. 变换矩阵一般不正交, 几何意义弱;	1. 必须解特征方程;

	2. 配方过程依赖技巧，对含参数二次型较烦； 3. 高维时配方步骤繁琐。"	2. 需进行正交化（Schmidt 过程），计算量大； 3. n3. 特征值可能是无理数，表达式复杂。
适用场景	1. 低阶手算、考题常用； 2. 只需判断惯性指数或定性分类； 3. 二次型含参数，讨论正定性（配方法更容易分析参数范围）。"	1. 需要正交变换（如：化二次曲面为标准方程并指明旋转角度）； 2. 需同时得到特征值（如：主轴定理、最小最大值定理应用）； 3. 理论推导（如：瑞利商、PCA 中样本协方差矩阵对角化）。"