

配方法、初等变换法化简二次型

方法	计算标准形步骤	计算规范形步骤	实二次型分类依据
配方法	1. 若二次型含有平方项,例如对于二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2-4x_2x_3+5x_3^2$, 将含有同一个变量的所有项集中。对于含 x_1 的项 $x_1^2+2x_1x_2$, 通过配方可得 $(x_1+x_2)^2-x_2^2$。 2. 继续对剩余变量进行配方。对上式剩余含 x_2 的项 $-x_2^2+3x_2^2-4x_2x_3$, 即 $2x_2^2-4x_2x_3$, 进一步配方得 $2(x_2-x_3)^2-2x_3^2$ 得 $f(x_1, x_2, x_3)=(x_1+x_2)^2+2(x_2-x_3)^2+3x_3^2。$ 3. 写出可逆线性变换。设 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}, X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y = CY.$	1. 实数域情形: (1)对于标准形 $f=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots +d_ry_r^2$, $r=\text{秩}(f)$. 将 $d_i>0$ 的项写出规范形的一项 z_i^2, 将 $d_j<0$ 的项写出规范形的一项 $-z_j^2$。例如 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2-4x_2x_3+5x_3^2$ 的标准形 $y_1^2+2y_2^2+3y_3^2$, 则其规范形为 $f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$。 (2) 规范形中平方项的系数只能是 1, -1, 0。 2 复数域情形: (1)对于标准形	1. 正定: 规范形中平方项系数全为 1, 即正惯性指数 $p=n$ (n 为变量个数)。2. 负定: 规范形中平方项系数全为 -1, 即负惯性指数 $q=n$。3. 半正定: 规范形中平方项系数为 1 和 0, 且正惯性指数 $p<n$。4. 半负定: 规范形中平方项系数为 -1 和 0, 且负惯性指数

	则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 经过非退化线性替换 $X=CY$ 化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+3y_3^2$。	$f=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots +d_ry_r^2, r=\text{秩}(f)$. 将 d_i 的项写出规范形的一项 z_i^2, 得规范形为 $z_1^2+z_2^2+\cdots +z_r^2$ (2) 规范形中平方项的系数只能是 1, 0。	$q < n$。5. 不定：规范形中平方项系数既有 1, 又有 -1. 例如实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2-4x_2x_3+5x_3^2$ 是正定二次型。
初等变换法	1. 写出二次型对应的矩阵 A。例如二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2-4x_2x_3+5x_3^2$, 其矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$。 2. 构造分块矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$, 其中 E 为单位矩阵, $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3. 对分块矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ 进行成对的初等行变换和		

	相应的列变换，将 A 化为对角矩阵 D，同时 E 变为 C。例如，$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-c_1+c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{c_2+c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix};$ 此时 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的对角线上元素构成标准形的系数，即标准形为 $f=y_1^2+2y_2^2+3y_3^2$，所有的非退化线性变换为 $X=CY$。
对称矩阵合同的判定	1 实数域情形：实对称矩阵 A, B 合同当且仅当 A, B 的正惯性指数与秩（负惯性指数与秩、正惯性指数与负惯性指数）对应相等。例如，实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2-4x_2x_3+5x_3^2$ 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 与三阶单位矩阵合同。 1 复数域情形：复对称矩阵 A, B 合同当且仅当 A, B 的秩相同。复二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2-4x_2x_3+5x_3^2$

的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

与任意 3 阶的秩为 3 的对称矩阵合同.