

第四、五次课 行列式的计算

教学目标要求：掌握用定义、性质、展开定理、“化三角形法”，“递推降阶法”，“数学归纳法”等计算行列式的技巧。

教学内容： n 阶行列式的计算

教学重点与难点：高阶字母行列式的计算。

复习：行列式的性质，行列式的展开定理

一、用行列式的定义计算

例 1：证明一个 n 阶行列式，如果等于零的元素个数大于 n^2-n ，则行列式为零。

证 因为行列式的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 即每一项都是由 n 个取自不同行不同列的数的积。而 n 阶行列式 D 中，不为零的数的个数小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，从而阶行列式 D 的每一项都是零，即它的值为零。

例 2： 证明 n 个数 $1, 2, \dots, n$ 的所有全排列中奇偶排列各占一半。

证明：考虑行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

中共有 $n!$ 项.正负各半.

二、直接利用行列式的性质计算

例 3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

[分析]：计算数字行列式一般有两个方法，其一是“主元素消元法”，即利用行列式的性质化其为三角形行列式。

$$\text{解： } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

例 4： 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

[分析]: 方法之二是“造零降阶法”,即利用按行或列展开进行降阶。

$$\begin{aligned} \text{解: } \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 9 & 0 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 9 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 13 & 14 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 13 & 14 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 24. \end{aligned}$$

例5 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

解:当 $n=1$ 时 $D_1=a_1+b_1$

当 $n=2$ 时 $D_2=(a_1-a_2)(b_2-b_1)$

当 $n \geq 3$ 时 $D_n=0$

(将第1行乘以-1加到第2...n行,或分成两个行列式)

例6 计算行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

(注意确定系数可以直接定 x^2 的系数为-3,也可以令 $x^2=0$,计算得 $D_4=-12$,从而 $D_4=-3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ 本题的解法称为析因子法,先利用行列式的性质找出全部因子,然后确定最高次项的系数.

例7 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & (a-3)^2 \\ b^2 & (b-1)^2 & (b-2)^2 & (b-3)^2 \\ c^2 & (c-1)^2 & (c-2)^2 & (c-3)^2 \\ d^2 & (d-1)^2 & (d-2)^2 & (d-3)^2 \end{vmatrix} = ? .$$

[分析]: 将行列式 D 看作 a 的多项式,按第一行展开可知 D 是 a 的至多二次多项式。当 b, c, d 有两个相等时,行列式为零。不妨设 b, c, d 互不相等,显然 b, c, d 为此多项式的三个根,矛盾。所以 $D=0$ 。

三、化为三角行列式

(1) 箭形行列式

例 8: 计算

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i=1,2,\dots,n)$$

$$\text{解: } D = \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 + c_i(-\frac{1}{a_i}) & 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n (a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i})$$

例 9 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

(3) 行(列)和相等的行列式

$$\text{例 10} \quad \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

(4) 其它类型

例 11 计算行列式 $D_n = |a_{ij}|$, 其中 $a_{ij} = \max\{i, n-i+1\}$

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 & n-1 \\ n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix} = ((-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n)$$

四、展开定理(降阶法)

例 12 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} (-170)$$

例 13 计算行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & a & & & & b \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & a & b & \\ & & & c & d & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & c & & & & d \\ c & & & & & d \end{vmatrix}$$

解 按第一行展开，有

$$D_{2n} = adD_{2(n-1)} - bc(-1)^{2n-1+1}D_{2(n-1)} + (ad - bc)D_{2(n-1)}$$

以此作递推公式，即可得

$$\begin{aligned} D_{2n} &= (ad - bc)D_{2(n-1)} = (ad - bc)^2 D_{2(n-2)} \\ &= \cdots = (ad - bc)^{n-1} D_2 = (ad - bc)^n \end{aligned}$$

五、升阶法

例 14 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x + a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x + a_3 & \cdots & a_n \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x + a_n \end{vmatrix}$$

注意 $x=0$ 时行列式为零。

解 当 $x=0$ 时，行列式为零。

当 $x \neq 0$ 时，将 D_n 添加一行及一列，构成 $n+1$ 阶行列式，使其值不变。

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} r_i + r_1 (-1) \\ \equiv \\ i=2,3,\cdots,n+1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} c_1 + c_j (\frac{a_j}{x}) \\ \equiv \\ i=2,3,\cdots,n+1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 - \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{x} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= x^n (1 - \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{x})$$

六、 利用已知行列式

例 15 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

解 $D \stackrel{r_3+r_1}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$

$$\stackrel{r(a+b+c)_1}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

例 16: 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$ 。

[分析]: D 与范德蒙行列式类似, 但缺行 (a_1, a_2, a_3) , 构造行列式

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a_1 & a_2 & a_3 \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ x^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

则 D 即是的一次项系数的相反数。

$$\text{解: } f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a_1 & a_2 & a_3 \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ x^3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$$

x 的系数为 $-(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

则 $D = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$ 。

例 17 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 & \cos \alpha_4 \\ \cos 2\alpha_1 & \cos 2\alpha_2 & \cos 2\alpha_3 & \cos 2\alpha_4 \\ \cos 3\alpha_1 & \cos 3\alpha_2 & \cos 3\alpha_3 & \cos 3\alpha_4 \end{vmatrix}$$

解 由 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ 利用范德蒙行列式即可获解,

结果为

$$D = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (\cos \alpha_i - \cos \alpha_j)$$

七、数学归纳法

例 18 证明范德蒙(van der monde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \quad (17)$$

其中记号 “ $\prod$ ” 表示全体同类因子的乘积。

证明 用数学归纳法。因为

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i)$$

所以当 $n=2$ 时 (17) 式成立。现在假设 (17) 式对 $n-1$ 阶范德蒙行列式成立，下证对 n 阶范德蒙行列式成立。

将 n 阶范德蒙行列式从 n 行开始，后一行减去前行的 x_1 倍，有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第一列展开，并把每列的公因子 $(x_j - x_1)$ 提出，就有

$$\begin{aligned} D_n &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

八、递推法

例 19: 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & ab & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 1 & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{vmatrix} \quad (a \neq b)$$

解 按第一行展开，有

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} \quad (18)$$

这就是我们要找的递推关系式。当 $n > 3$ 时，把 (18) 式改写为

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

进而 $D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \cdots = D_2 - aD_1$

$$\text{而 } D_1 = a+b, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab$$

$$\text{代入上式，得 } D_n - aD_{n-1} = b^n \quad (19)$$

$$\text{由 (18) 式又可得 } D_n - bD_{n-1} = a^n \quad (20)$$

由 (19)、(20) 解得

$$(a-b) = a^{n+1} - b^{n+1}$$

$$\text{当 } a \neq b \text{ 时, } D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

当 $a=b$ 时, (18) 式化为 $D_n=aD_{n-1}-a^n$, 连续运用这个递推公式, 得 $D_n=a^{n-1}D_1+(n-1)a^n$ 。

九、代数余子式的计算

例 20 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

(1) 求 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$. (2) 求 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$

(1) 解法 1 因为 $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

D_1 与 D 的第 1 列元素的代数余子式相同

所以将 D_1 按第 1 列展开可得 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=0$.

解法 2 因为 D 的第 3 列元素与 D 的第 1 列元素的代数余子式相乘求和为 0, 即 $3A_{11}+3A_{21}+3A_{31}+3A_{41}=0$

所以 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=0$

(2) $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

十、综合例题

例 21 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

解 由于行列式的每一行都是由 $1, 2, \dots, n$ 构成, 可先将该行列式的第二列到第 n 列加到第一列, 然后提取公因子, 即得

$$D = \frac{n(n-1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}_{(n)}$$

将所得 n 阶行列式从 n 行开始，后一行减去前行的 1 倍，得

$$D = \frac{n(n-1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n)}$$

按第一列展开，得

$$D = \frac{n(n-1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

所得 $n-1$ 阶行列式的每一行都由 $n-2$ 个 1 和一个 $n-1$ 构成，可先将其第二列到第 $n-1$ 列加到第一列，这样可使第一列元素全部为 -1，再将第一列的 1 倍分别加到第二到第 $n-1$ 列，即得

$$D = \frac{n(n-1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} (-1)(-n)^{n-2} (-1)^{\tau(n-1, n-2 \cdots 2, 1)}$$

$$= \frac{n^{n-2}(n-1)}{2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

本节给出了行列式的几种常用的计算方法；但在实际计算中可将这些方法综合运用，希望读者仔细体会。当然行列式的计算除了这些方法外，还有许多其它方法，如分离线性因子法、利用行列式的乘法法则等，读者可自学和研究。

作业：P100-101 17 (2) (4) , 18 (2) (4)

作业：P100-101 18 (3) (5), 补充