

线性空间与向量空间的线性关系

前提：求出线性空间的一组基

线性空间的维数与基的计算步骤：

- 1. 将线性空间 W 表示生成子空间 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$.
- 2. 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 极大无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$

则维(W)= r , $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是 W 的一组基.

线性空间问题	具体计算方法	与坐标相关问题的对应关系
线性关系判断	设线性空间 V 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 在 V 中取定一组基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, 将 α_i 用基线性表示为 $\alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} \xi_j = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \eta_i, i=1,2, \cdots, s$. 判断线性关系等价于判断齐次线性方程组 $\sum_{i=1}^s k_i \alpha_i = \sum_{i=1}^s k_i \sum_{j=1}^n a_{ji} \xi_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^s k_i a_{ji} \right) \xi_j = 0$. 是	线性空间中向量组的线性关系判断转化为以向量组在基下坐标构成

	否有非零解，将由于 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 线性无关，等价于判断齐次线性方程组 $\sum_{i=1}^s k_i a_{ji} = 0 \Leftrightarrow (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 是否有非零解。}$ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关与否等价于 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 线性相关与否	的向量组的线性关系。
求极大无关组	1. 设线性空间 V 中向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$，在 V 中取定一组基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$，将 α_i 用基线性表示为 $\alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} \xi_j = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \eta_i, i=1, 2, \dots, s$。 2. 令矩阵 $A = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s)_{n \times s}$，对 A 进行初等行变换化为行阶梯形矩阵。3. 行阶梯形矩阵中非零行首非零元所在列对应的原向量组中的向量，即为一个极大无关组。 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大无关性对应于 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 的极大无关组	线性空间向量组的极大无关组求解转化为以向量组在基下坐标构成的向量组的极大无关组问题。

扩基	1. 设线性空间 V 中线性无关向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 设 V 的维数为 n ($s < n$)。 2. 在 V 中取定一组基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 将 α_i 用基线性表示为 α_i $= \sum_{j=1}^n a_{ji} \xi_j = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \eta_i, \quad i=1, 2, \dots, s.$ 令矩阵 $A = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s)_{n \times s}$ 3. 在矩阵 A 添加 $n-s$ 列 $\eta_{s+1}, \eta_{s+2}, \dots, \eta_n$ 使得 $A_I = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 可逆, $\text{令 } \alpha_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} \xi_j = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \eta_k, \quad k = s+1, \dots, n.$ 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是一组基。	扩基问题转化为由以向量组在基下坐标构成的矩阵构造可逆矩阵的问题
-----------	---	--