

线性变换的值域与核的计算

一、值域的计算

求线性变换的值域，可通过以下常见方法：

基于线性空间基的方法

1. 确定线性变换在一组基下的矩阵

○ 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一组基， σ 是 V 上的线性变换。已知

$\sigma(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} \alpha_j, i = 1, 2, \dots, n$ ，则线性变换 σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 。

○ 例如，对于三维线性空间 V ，基为 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1)$ ，线性变换 σ 满足

$\sigma(\alpha_1) = (1, 2, 3), \sigma(\alpha_2) = (4, 5, 6), \sigma(\alpha_3) = (7, 8, 9)$ ，则 σ 在这组基下的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}。$$

2. 分析矩阵的列向量组

- 线性变换 σ 的值域 $R(\sigma)$ 等于由 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_n)$ 生成的子空间, 即

$R(\sigma) = L(\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_n))$ 。而 $\sigma(\alpha_i)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标就是矩阵 A 的第 i 列。

- 对矩阵 A 进行初等行变换化为行阶梯形矩阵, 行阶梯形矩阵中非零行的首非零元所在列对应的原矩阵 A 的

列向量, 构成列向量组的一个极大线性无关组。例如, 对矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ 进行初等行变换,

$r_2 - 2r_1, r_3 - 3r_1$ 得到 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$, 再 $r_3 - 2r_2$ 得到 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 首非零元在第一列

和第二列, 所以 $\sigma(\alpha_1)$ 和 $\sigma(\alpha_2)$ 构成 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \sigma(\alpha_3)$ 的一个极大线性无关组。

- 那么线性变换 σ 的值域 $R(\sigma) = L(\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2))$, 即 $R(\sigma)$ 是由 $\sigma(\alpha_1)$ 和 $\sigma(\alpha_2)$ 生成的子空间,

$\dim(R(\sigma))$ 等于极大线性无关组所含向量的个数, $\downarrow$ 此例中 $\dim(R(\sigma)) = 2$ 。

直接根据定义求解

1. 根据定义确定值域元素形式

- 线性变换 σ 的值域 $R(\sigma) = \{\sigma(\alpha) | \alpha \in V\}$ 。对于 $\forall \alpha \in V$, 设 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$, 则
$$\sigma(\alpha) = k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) + \cdots + k_n\sigma(\alpha_n)。$$
- 例如, 已知线性变换 σ 在基 α_1, α_2 下, $\sigma(\alpha_1) = \beta_1, \sigma(\alpha_2) = \beta_2$, 对于 $\alpha = x\alpha_1 + y\alpha_2 \in V$,
$$\sigma(\alpha) = x\beta_1 + y\beta_2。$$

2. 分析值域元素的关系

- 通过分析 $\sigma(\alpha)$ 的表达式, 确定值域中向量满足的条件。比如, 若 $\beta_1 = (1, 0), \beta_2 = (0, 1)$, 那么
$$\sigma(\alpha) = (x, y),$$
 值域 $R(\sigma)$ 就是整个二维向量空间 $\mathbb{R}^2$; 若 $\beta_1 = (1, 1), \beta_2 = (2, 2)$, 则
$$\sigma(\alpha) = (x + 2y, x + 2y),$$
 值域 $R(\sigma)$ 是直线 $y = x$, 即 $R(\sigma) = L((1, 1)), \dim(R(\sigma)) = 1。$

通过以上两种主要方法, 可有效求出线性变换的值域及其维数。

二、核的计算

1. 明确线性变换核的定义

- 设 V 是数域 P 上的线性空间， σ 是 V 上的线性变换，线性变换 σ 的核（记为 $\ker(\sigma)$ ）定义为

$\ker(\sigma) = \{\alpha \in V \mid \sigma(\alpha) = 0\}$ ，即 $\ker(\sigma)$ 是由 V 中所有被 σ 映射到零向量的向量组成的集合。它是 V 的一个子空间。

2. 在有限维线性空间中计算核

- 选择基并确定矩阵表示：设 V 是 n 维线性空间， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一组基。已知线性变换 σ 在这组基下的矩阵为 A ，即 $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$ 。

- 将问题转化为齐次线性方程组：对于 $\forall \alpha \in V$ ，设 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$ ，则

$$\sigma(\alpha) = x_1\sigma(\alpha_1) + x_2\sigma(\alpha_2) + \dots + x_n\sigma(\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)(x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n)$$

，其中 A_i 表示矩阵 A 的第 i 行。因为 $\sigma(\alpha) = 0$ ，所以 $(x_1, x_2, \dots, x_n)A = (0, 0, \dots, 0)$ ，这就转化为求解齐次线性方程组 $Ax = 0$ 。

◦ **求解齐次线性方程组：**

◦ **对矩阵 A 进行初等行变换：**将矩阵 A 化为行最简形矩阵。例如，若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ，通过初等行变

换 $r_2 - 2r_1, r_3 - r_1$ 得到 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ，再交换第二行和第三行并进一步化为行最简形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

◦ **确定基础解系：**由行最简形矩阵确定自由未知量，进而求出齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系。对于

上述例子，令 $x_3 = t$ ($t \in P$)，则 $x_1 = -t, x_2 = -t$ ，所以基础解系为 $\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

◦ **得到线性变换的核：** $\ker(\sigma)$ 中的向量都可以表示为齐次线性方程组 $Ax = 0$ 基础解系的线性组合。所以

$\ker(\sigma) = \{t(-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) | t \in P\}$ ，即 $\ker(\sigma)$ 是由 $-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$ 生成的子空间，

$\dim(\ker(\sigma))$ 等于基础解系所含向量的个数，在此例中 $\dim(\ker(\sigma)) = 1$ 。

综上，在有限维线性空间中，计算线性变换的核主要通过找到线性变换在一组基下的矩阵，将其转化为齐次线性方程组求解，进而确定线性变换核的具体形式。