

线性变换对角化的步骤

步骤	具体内容
1. 确定线性变换在一组基下的矩阵 A	设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基, 已知线性变换 σ 满足 $\sigma(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} \alpha_j, \quad i = 1, 2, \cdots, n$, 则矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 即为线性变换 σ 在这组基下的矩阵。
2. 求矩阵 A 的特征值	计算特征多项式 $f(\lambda) = \lambda E - A $, 其中 E 为 n 阶单位矩阵。令 $f(\lambda) = 0$, 求解该方程得到矩阵 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (可能有重根)。
3. 对每个特征值 λ_i , 求对应的特征向量	将特征值 λ_i 代入齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$, 求解该方程组得到基础解系 $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{is_i}$, 这些基础解系中的向量就是属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量。

	4. 判断线性变换是否可对角化	若 n 个特征向量线性无关（即所有特征值对应的线性无关特征向量个数之和等于 n ），则线性变换可对角化；否则不可对角化。	
	5. 构造可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ （若可对角化）	将所有特征向量按列排列构成可逆矩阵 $P = (\xi_{11}, \cdots, \xi_{1s_1}, \xi_{21}, \cdots, \xi_{2s_2}, \cdots, \xi_{n1}, \cdots, \xi_{ns_n})$ ，对角矩阵 Λ 的主对角线元素依次为对应的特征值，即 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots, \lambda_n)$ ，其中 λ_i 重复 s_i 次。此时有 $P^{-1}AP = \Lambda$ ，在线性变换意义下，在由 P 的列向量构成的基下，线性变换 σ 的矩阵为对角矩阵 Λ 。	