

线性变换与矩阵的对应关系

比较维度	线性变换	矩阵	对应关系
基本定义	设 V 是数域 P 上的线性空间， 称 σ 是 V 到自身的线性变换， 若 $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$, $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha), \quad \forall \alpha, \beta \in V,$ $k \in P$"	由数域 P 中的元素排 成的矩形阵列	在 n 维线性空间 V 中取定一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 线性变换 σ 满足 $\sigma(\varepsilon_i) = a_{1i}\varepsilon_1 + a_{2i}\varepsilon_2 + \dots + a_{ni}\varepsilon_n, i=1,2,\dots,n.$, 则矩阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 是 σ 在该基下的矩阵, 且在给定基 下二者一一对应。 若 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标为 X, 则 $\sigma(\alpha)$ 基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标为 AX.
运算	加法: $(\sigma + \tau)(\alpha) = \sigma(\alpha) + \tau(\alpha)$ 数乘: $(k\sigma)(\alpha) = k\sigma(\alpha)$ 乘法: $(\sigma\tau)(\alpha) = \sigma(\tau(\alpha))$	加法: $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ 数乘: $(kA)_{ij} = kA_{ij}$ 乘法: $(AB)_{ij} = \sum k = In$	若 σ, τ 在同一组基下矩阵分别为 A, B, 则 $\sigma + \tau$ 对应 $A+B$; $k\sigma$ 对应 kA, $\sigma\tau$ 对应 AB; 若 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)P$, P 可逆。 σ

		$A_{ik} \quad B_{kj}$	在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 A , 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为 B , 则 $B=P^{-1}AP$.
可逆性	存在线性变换 τ , 使得 $\sigma \tau = \tau$ $\sigma = \epsilon$ (ϵ 为恒等变换), 则 σ 可逆	存在矩阵 B , 使得 $AB=BA=E$ (E 为单位矩阵), 则 A 可逆	σ 可逆当且仅当它在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵 A 可逆, 且若 σ 可逆, σ^{-1} 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 A^{-1} .
特征值与特征向量	若存在非零向量 $\alpha \in V$ 和数 $\lambda \in P$, 使得 $\sigma(\alpha) = \lambda \alpha$, 则 λ 是 σ 的特征值, α 是属于 λ 的特征向量	若存在非零向量 X 和数 λ , 使得 $AX = \lambda X$, 则 λ 是 A 的特征值, X 是属于 λ 的特征向量	σ 的特征值与它在某组基下矩阵 A 的特征值相同。 σ 的对应特征值 λ 的特征向量 β 在该基下的坐标 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是矩阵 A 特征值 λ 的特征向量。反之, 矩阵 A 对应于 λ 的特征向量 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\beta=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)X=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\dots+x_n\varepsilon_n$ 是线性变换 σ 对应特征值 λ 的特征向量。

对角化	若存在 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 使得 σ 在该基下的矩阵为对角矩阵 Λ ，则称线性变换 σ 可对角化.	若存在可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ ， Λ 为对角矩阵.	可对角化的充要条件是 σ (或矩阵 A) 有 n 个线性无关的特征向量。若线性变换 σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 下的矩阵 A 为对角矩阵, $(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)P$ ，则 $P^{-1}AP = \Lambda$ ， A 可对角化。若 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵 A ， A 可对角化， $P^{-1}AP = \Lambda$ 。令 $(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)P$ ，则 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 是一组基且 σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 下的矩阵为 Λ ， σ 可对角化.
值域与核	值域 $\text{Im}(\sigma) = \{ \sigma(\alpha) \mid \alpha \in V \}$ 核 $\text{Ker}(\sigma) = \{ \alpha \in V \mid \sigma(\alpha) = 0 \}$		若 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 A ，则值域 $\text{Im}(\sigma) = L(\sigma(\varepsilon_1), \cdots, \sigma(\varepsilon_n))$ ，其维数等于矩阵 A 的秩； $\text{Ker}(\sigma)$ 等于特征值 0 的特征子空间，其维数等于 $n - \text{秩}(A)$.

不变子空间	若 W 是 V 的子空间, 且 $\forall \alpha \in W$, 有 $\sigma(\alpha) \in W$, 则 W 是 σ 的不变子空间		设 W 是 σ 的不变子空间, 在 V 中选取一组基, 使得前 m 个向量是 W 的基, 则 σ 在这组基下的矩阵 A 为准上三角矩阵 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, 其中 A_{11} 是 $\sigma _W$ (σ 在 W 上的限制) 在 W 的基下的矩阵.
Jordan 标准形	设 σ 是复线性空间 V 上的线性变换, σ 的特征多项式为 $f(\lambda)$, $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$ 则 V 可分解成不变子空间的直和 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$ 其中 $V_i = \{\xi \mid (A - \lambda_i E)^{r_i} \xi = 0, \xi \in V\}$	对任意的 n 阶复矩阵 A , 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = J$ 为 Jordan 形矩阵.	设 σ 是复线性空间 V 上的线性变换, σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 A , 则存在 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)P$, 使得 σ 在该基下的矩阵为 $P^{-1}AP = J$ 为 Jordan 形矩阵.
正交变换	正交变换: 设 σ 是欧氏空间 V	方阵 A 称为正交矩	V 中取定一组 标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 若 正交

	上的线性变换，若 $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta), \forall \alpha, \beta \in V.$ 则称 σ 是 V 上的正交变换。	阵，若即 $A^T A = E$。 A 为正交矩阵当且仅当 $A^{-1} = A^T$; 当且仅当 A 的行(列)向量组是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基。	变换 σ 满足 $\sigma(\varepsilon_i) = a_{1i}\varepsilon_1 + a_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + a_{ni}\varepsilon_n, i = 1, 2, \cdots, n.,$ 则矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是 σ 在该基下的矩阵且 A 是正交矩阵。σ 是第一(二)类当且仅当 $A = 1(-1)$。
对称变换	对称变换：设 σ 是欧氏空间 V 上的线性变换，若 $(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma(\beta)), \forall \alpha, \beta \in V.$ 则称 σ 是 V 上的对称变换。	方阵 A 称为对称矩阵，若即 $A^T = A$。 对称矩阵的特征值是实数，其对应不同特征值的特征向量正交，对称矩阵可以对角化	V 中取定一组标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$，若对称变换 σ 满足 $\sigma(\varepsilon_i) = a_{1i}\varepsilon_1 + a_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + a_{ni}\varepsilon_n, i = 1, 2, \cdots, n.,$ 则矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是 σ 在该基下的矩阵且 A 是对称矩阵。 由线性变换特征值特征向量的定义及标准正交基的性质知：对称变换的特征值是实数；其对应不同特征值的特征向量正交；对

			称变换可以对角化。
--	--	--	-----------

注：1. 正交变换 σ 在标准正交基下的矩阵是正交矩阵 A ，且当 $|A|=1$ 时， σ 是第一类正交变换，当 $|A|=-1$ 时， σ 是第二类正交变换。2. 对称变换在标准正交基下的矩阵是对称矩阵。