

约当标准型的计算

思路：求矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda E - A$ 的初等因子 $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}, i=1, 2, \dots, s \rightarrow$ 写约当块 $J_i = J(\lambda_i, k_i), i=1, 2, \dots, s \rightarrow$ 约当标准形

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_s \end{pmatrix}.$$

计算步骤：1. 求矩阵 A 的不变因子；2. 求初等因子；3. 写约当标准形

1. 如何求不变因子

方法	具体步骤	示例
从特征矩阵 $\lambda E - A$ 的史密斯标准形求矩阵 A 的不变因子	对特征矩阵 $\lambda E - A$ 进行初等变换，将其化为史密斯标准形 $S(\lambda) = \text{diag}(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda))$, 其中 $d_i(\lambda)$ 是首一多项式且满足 $d_i(\lambda) d_{i+1}(\lambda), i=1, 2, \dots, n-1$.	矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda E - A$ 经初等变换后得到史密斯标准形 $\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 - 1 \end{pmatrix}$ ，则不变因子是 $d_1(\lambda) = \lambda - 1, d_2(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1),$ $d_3(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)。$

	则 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$ 即为矩阵 A 的不变因子。 注： 矩阵 A 的不变因子的乘积 $d_1(\lambda)d_2(\lambda) \cdots d_n(\lambda)$ = 特征多项式 $\lambda E - A$.	
由特征矩阵的行列式因子求不变因子	1. 计算特征矩阵 $\lambda E - A$ 的各阶行列式因子 $D_k(\lambda)$, $k=1, 2, \dots, n$。 $D_k(\lambda)$ 是 $\lambda E - A$ 中所有 k 阶子式的首一最大公因式。 2. 根据公式 $d_1(\lambda) = D_1(\lambda)$, $d_k(\lambda) = D_k(\lambda) / D_{k-1}(\lambda)$, $k=2, \dots, n$, 求出不变因子 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$.	设 3 阶矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda E - A$, 计算得到 $D_1(\lambda) = \lambda - 1$, $D_2(\lambda) = (\lambda - 1)2(\lambda + 1)$, $D_3(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$。 则 $d_1(\lambda) = D_1(\lambda) = \lambda - 1$, $d_2(\lambda) = D_2(\lambda) / D_1(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, $d_3(\lambda) = D_3(\lambda) / D_2(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$。

2. 如何求初等因子（初等因子与不变因子的 1-1 对应关系）

关系类型	对应关系描述	具体示例
从不变因子	将每个不变因子分解为不可约因式的幂次乘积，这	假设矩阵的不变因子为 $d_1(\lambda) = \lambda - 1$, d_2

到初等因子	些不可约因式的幂次就是初等因子。设不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$, 且 $d_i(\lambda) d_{i+1}(\lambda), i=1, 2, \dots, n-1.$ 对每个 $d_i(\lambda)$ 进行分解, 所有分解得到的不可约因式幂次组合在一起, 构成初等因子. 注: 矩阵 A 的初等因子的乘积=特征多项式 $\lambda E - A$.	$(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, $d_3(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. 对 $d_1(\lambda)$ 分解得 $(\lambda - 1)$; 对 $d_2(\lambda)$ 分解得 $(\lambda - 1), (\lambda - 2)$; 对 $d_3(\lambda)$ 分解得 $(\lambda - 1), (\lambda - 2)^2$. 则初等因子为 $(\lambda - 1), (\lambda - 1), (\lambda - 1), (\lambda - 2), (\lambda - 2), (\lambda - 2)^2$.
从初等因子到不变因子	假设初等因子中有 s 个不同的一次因式, 矩阵 A 的阶数是 n, 则写一个 s 行, n 列表格。其中每行将同一个一次因式的幂次从高到低排列, 不足 n 个的用 1 补齐成 n 列。则 s 行, n 列表格中第一列、第二列, $\dots$, 第 n 列元素的乘积是不变因子 $d_n(\lambda), d_{n-1}(\lambda), \dots, d_1(\lambda)$。	有初等因子 $(\lambda - 1), (\lambda - 1)^2, (\lambda - 2), (\lambda - 2)^2, (\lambda - 2)^3$. 按不可约因式 $\lambda - 1$ 和 $\lambda - 2$ 分组. $\lambda - 2$: $(\lambda - 2)^3, (\lambda - 2)^2, \lambda - 2$; $\lambda - 1$: $(\lambda - 1)^2, \lambda - 1, 1$ 从最高次幂开始: $d_3(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$; $d_2(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$; $d_1(\lambda) = \lambda - 2$. 需保证 $d_1(\lambda) d_2(\lambda), d_2(\lambda) d_3(\lambda)$.

3. 如何求约当标准形

步骤	具体内容	示例
1. 确定初等因子	给定矩阵的初等因子，初等因子的一般形式为 $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$，其中 λ_i 是特征值，k_i 是正整数，表示该特征值对应的幂次。	设矩阵的初等因子为 $(\lambda - 1)^2$，$(\lambda - 2)$，$(\lambda - 2)^3$。
2. 写出 Jordan 块	对于每一个初等因子 $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$，对应一个 k_i 阶的 Jordan 块 $J_i = J(\lambda_i, k_i)$，其形式为：即主对角线元素为特征值 λ_i，主对角线左下方元素为 1，其余元素为 0。	由初等因子 $(\lambda - 1)^2$，对应 Jordan 块 $J(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$；由初等因子 $\lambda - 2$，对应 Jordan 块 $J(2,1) = (2)$；由初等因子 $(\lambda - 2)^3$，对应 Jordan 块 $J(2,3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$。

3. 写出约当标准形	将所有由初等因子得到的 Jordan 块按对角形式排列，构成约当标准形 J。	上述 Jordan 块构成的约当标准形为 $J = \begin{pmatrix} J(1,2) & 0 & 0 \\ 0 & J(2,1) & 0 \\ 0 & 0 & J(2,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$
-------------------	---	--