

矩阵的三大等价关系

比较项目	等价	相似	合同
引入背景	求解线性方程组，增广矩阵初等行变换后得行阶梯形矩阵与原增广矩阵等价	线性变换在不同基下矩阵的关系 (不同矩阵对应的是否是同一个线性变换)	非退化线性替换后的二次型与原二次型矩阵的关系(不同对称矩阵是否表示同一类二次型)
定义	设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵，若存在可逆的 m 阶矩阵 P 与可逆的 n 阶矩阵 Q ，使得 $B=PAQ$ ，则称矩阵 A 与 B 等价	设 A, B 为 n 阶方阵，若存在可逆的 n 阶矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP=B$ ，则称矩阵 A 与 B 相似	设 A, B 为 n 阶实对称矩阵，若存在可逆的 n 阶矩阵 C ，使得 $C^TAC=B$ ，则称矩阵 A 与 B 合同
矩阵要求	A, B 可以是一般的 $m \times n$ 矩阵	A, B 必须是 n 阶方阵	A, B 必须是 n 阶实对称矩阵
举例	对矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ，可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ 使得	矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似，可逆矩阵 $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 使得 $P^{-1}AP=B$ ， A	对于实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，可逆矩阵 $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 使得

	$PA = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, 矩阵 A 与 B 等价。	与 B 相似。	$C^TAC=B$, A 与 B 合同。
标准形	每个 $m \times n$ 矩阵 A 都与 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$ 等价	每个 n 阶方阵都与一个 Jordan 形矩阵相似	每个 n 阶复对称矩阵 A 都与 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$ 等价; 每个 n 阶实对称矩阵 A 都与 $\begin{pmatrix} E_p & 0 & 0 \\ 0 & -E_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$ 等价;
不变量	秩	秩不变, 即 $r(A)=r(B)$; 特征多项式相同; 特征值相同 (包括重数); 迹相等, 即 $tr(A)=tr(B)$ (迹为矩阵主对角线元素之和); $ A = B $ 。不变因子、行列式因子和初等因子	秩; 对称性; 正定性; 正惯性指数相同; 负惯性指数;

判定（充要）条件	1. A 可经过初等行列变换变为 B ; 2. A 与 B 的秩相同; 2. A 与 B 的标准形相同;	1. $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 等价; 2. $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 史密斯标准形相同 3. A 与 B 有相同不变因子（行列式因子、初等因子）。	1. $x^T A x$ 与 $x^T B x$ 规范形相同（ A 可经合同变换化为 B ）; 2. A 与 B 正、负惯性指数相同; 3. A 与 B 正(负)惯性指数和秩相同; 4. A 与 B 非零特征值个数和正（负）特征值个数相等;
用途	在矩阵化简、求矩阵的秩等方面应用广泛	在求矩阵的幂、判断矩阵是否可对角化、计算矩阵的特征值和特征向量等方面有重要应用	主要用于二次型的化简, 判断二次型的正定性等; 多元函数求极值

