

矩阵的对角化

角度	可对角化的充要条件	详细解释
特征值与特征向量	n 阶矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量	设 A 为 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵 $P=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, 使得 $P^{-1}AP=A$ (A 为对角矩阵), 则 $A\xi_i=\lambda_i\xi_i, i=1,2,\dots,n$ 。 P 可逆意味着其列向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 线性无关, 即 A 有 n 个线性无关的特征向量。反之, 若 A 有 n 个线性无关的特征向量, 就能构造出这样的可逆矩阵 P 使 A 相似于对角矩阵 A 。"
最小多项式	矩阵 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 无重根	最小多项式 $m(\lambda)$ 满足: 若 $f(A)=0$, 则 $m(\lambda) \mid f(\lambda)$ 。若 $m(\lambda)$ 无重根, 设 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_s)$, λ_i 互不相同, 由 $m(A)=0$ 结合凯莱 - 哈密顿定理可推出 A 有 n 个线性无关的特征向量, 从而可对角化; 反之, 若 A 可对角化, 其特征多项式 $f(\lambda)$ 分解为 $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$, $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$, 此时最小多项式 $m(\lambda)$ 无重根。
初等因子	矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 的初等因子	初等因子决定约当标准形的结构。若初等因子全是一次的, 即每个初等因子形如 $\lambda-\lambda_i$, 那么约当标准形 J 是对角矩阵, 因为 A 与约当标准形 J 相似, 所以 A

	全是一次的	可对角化；反之，若 A 可对角化，其约当标准形是对角矩阵，那么特征矩阵 $\lambda E - A$ 的初等因子必然全是一次的。
约当标准形	矩阵 A 的约当标准形 J 是对角矩阵	任何矩阵 A 都相似于其约当标准形 J 。若 J 是对角矩阵，即 $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ，则存在可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP = J$ ，所以 A 可对角化；反之，若 A 可对角化，那么与 A 相似的约当标准形必然是对角矩阵。"