

正定二次型的判定方法

方法	条件	步骤	示例
定义法	对任意非零 x , $x^T A x > 0$ 。	验证 A 对称, 且二次型值恒正。	验证 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 > 0$ 对所有非零 (x_1, x_2) , $f(x_1, x_2) > 0$.
顺序主子式法	所有顺序主子式 > 0 。	计算各阶顺序主子式并判断符号。	对矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 1 阶主子式 $2 > 0$, 2 阶主子式 $ A = 3 > 0$, 故正定。
特征值法	所有特征值 > 0 。	求 A 的特征值并判断符号。	矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ 的特征值为 3 和 4, 均正, 故正定。
合同于单位矩阵	存在可逆 C 使 $A = C^T C$ 。	分解 A 为 $C^T C$, C 可逆	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
正惯性指数	正惯性指数 $p = n$, 规范形系数全为 1。	通过配方法或初等变换化标准形, 再化为规范形。	二次型 $f = 2x_{12} + 3x_{22}$ 的规范形为 $z_1^2 + z_2^2$, 故正定。