

哈密顿凯莱定理的理解与应用

哈密顿-凯莱 (Hamilton-Cayley) 定理 设 A 是数域 P 上一个 $n \times n$ 矩阵, $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 是 A 的特征多项式, 则

$$f(A) = A^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})A^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|E = 0 \quad (1)$$

推论 设对于线性空间 V 上的线性变换 A , 若其在某组基下的矩阵为 A , 记的 A 特征多项式为 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$, 那么 $f(A) = 0$. (2)

如何理解哈密顿凯莱定理:

(1) 矩阵与多项式角度: 哈密顿 - 凯莱定理揭示了矩阵 (线性变换) 与它的特征多项式之间的紧密联系. 特征多项式是由矩阵 (线性变换) 定义的一个多项式, 而该定理表明矩阵 (线性变换) 是特征多项式的根. **任意 n 阶矩阵 A (n 维线性空间上的线性变换 A), 都存在 n 次特征多项式以 A (A) 为根.** 这就如同给矩阵 (线性变换) 赋予了一种内在的 “代数约束”, 使得矩阵 (线性变换) 的幂次运算等可以通过这个特征多项式来进行一定的简化和规范. 例如, 对于一个 2 阶矩阵 A , 其特征多项式 $f(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$, 根据定理, $A^2 + bA + cE = 0$, 这意味着矩阵 A 的二次幂可以用一次幂和零次幂 (单位矩阵 E) 的线性组合来表示.

(2) 几何角度: **对于一个 n 阶矩阵 A (n 维线性空间 V 上的线性变换 A), 任意 n 维向量 α (α 是 V 中的任意向量), $A\alpha, A^2\alpha, \cdots, A^n\alpha$ ($A\alpha, A^2\alpha, \cdots, A^n\alpha$) 一定线性相关.** (1), (2) 两边作用 α 即可.

哈密顿凯莱定理的应用: 矩阵幂次的简化. 在计算矩阵的高次幂时, 该定理提供了一种有效的方法.

例如. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1) 求 A 的特征多项式 $f_A(\lambda)$; (2) 计算 $g(A) = 2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4E$.

解: 记 $g(x) = 2x^8 - 3x^5 + x^4 + x^2 - 4$, 矩阵 A 的特征多项式 $f_A(x) = x^3 - 2x + 1$

由带余除法得 $g(x) = (x^3 - 2x + 1)(2x^5 + 4x^3 - 5x^2 - 9x - 14) + 24x^2 - 37x + 10$

$$=f_A(x)q(x)+r(x)$$

由 *Hamilton – Cayley* 定理得, $f_A(A)=O$, 从而有

$$g(A)=r(A)=24A^2-37A+10E=\begin{pmatrix} -3 & 48 & -26 \\ 0 & 95 & -61 \\ 0 & -61 & 34 \end{pmatrix}.$$