

一、二次型的矩阵

任给矩阵 $A=(a_{ij})$, $X^TAX=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ 是一个二次型, 但 A 未必是二次型的矩阵. 若 A 是对称矩阵, 则二次型 $X^TAX=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ 的矩阵是 A ; 若 A

不是对称矩阵, 则二次型 $X^TAX=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ 的矩阵是 $\frac{1}{2}(A+A^T)$.

例如,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & a \\ 4-a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \forall a \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 才是 $f(x_1, x_2)$ 的矩阵。

二、二次型与对称矩阵的 1-1 对应关系

设系数在数域 P 中的二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 \\ &\quad + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2 \quad (1) \end{aligned}$$

则其矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $a_{ij} = a_{ji}$ 正是它的 x_ix_j 项的系数的一

半, 而 a_{ii} 是 x_i^2 项的系数.

反之, 给定对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

$X^TAX = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i \neq j} 2a_{ij}x_ix_j$ 是一个二次型.

因此二次型与对称矩阵 1-1 对应.