

第八章 Jordan 标准形核心问题链

特征矩阵的标准形 $\rightarrow$ 不变因子 $\rightarrow$ 初等因子 $\rightarrow$ Jordan 块 $\rightarrow$ Jordan 标准形

核心问题

给定一个数域 F 上的 n 阶矩阵 A ，如何不依赖“猜测特征向量”的方式，系统、唯一地确定它的 Jordan 结构？本章的关键思想是：把相似问题转化为多项式矩阵 $\lambda E - A$ 的等价问题，再从 Smith 标准形中逐层提取不变因子、初等因子和 Jordan 块。

矩阵 A 的相似结构怎样编码？



构造特征矩阵 $\lambda I - A$ ，把数域 F 上的矩阵问题提升到多项式环 $F[\lambda]$ 上



怎样把 $\lambda I - A$ 化到最简单且可比较的形式？——求 Smith 标准形



标准形中的对角多项式怎样提取？——不变因子



不变因子怎样拆成最基本的“不可约幂”信息？——初等因子



在线性因子情形，每个初等因子对应什么结构？——Jordan 块



把全部 Jordan 块按特征值组合起来——得到 Jordan 标准形 J



若需要相似变换矩阵，再构造 Jordan 链得到 P ，使 $P^{-1}AP = J$

一眼看懂本章主线

特征矩阵的标准形负责“把相似问题标准化”；不变因子负责“压缩全部行列式因子信息”；初等因子负责“把结构拆到不可约幂”；Jordan 块负责“把不可约幂转回矩阵块”；Jordan 标准形则给出矩阵相似类的标准代表。

二、为什么先研究特征矩阵 $\lambda E - A$ ？

问题链 1：从矩阵相似到特征矩阵等价

A 与 B 是否相似？



若 $B = P^{-1}AP$ ，则 $\lambda I - B = P^{-1}(\lambda I - A)P$



因此相似矩阵的特征矩阵在 $F[\lambda]$ 上等价



反过来，若 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 等价，则 A 与 B 相似



所以：矩阵相似问题 $\Leftrightarrow$ 特征矩阵等价问题

$A \sim B \Leftrightarrow \lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 在 $F[\lambda]$ 上等价

提示：这一步把“找一个常数可逆矩阵 P ”的困难，转化为研究多项式矩阵的等价变换。学生由此看到：Jordan 理论不是突然出现的新技巧，而是“矩阵相似”问题在 $F[\lambda]$ 上的结构化解决方案。

三、节点一：特征矩阵的标准形——怎样把 $\lambda E - A$ 化到最简单？

问题链 2：为什么存在 Smith 标准形？

$\lambda I - A$ 是一个多项式矩阵，比较仍然复杂



允许对它作可逆的初等行、列变换



这些变换保持等价关系



利用 $F[\lambda]$ 逐步消元并整理整除关系



最终得到对角标准形 $\text{diag}(d_1(\lambda), \dots, d_n(\lambda))$



并可规定 $d_1 | d_2 | \dots | d_n$, 且各 d_i 首一

$$P(\lambda)(\lambda I - A)Q(\lambda) = \text{diag}(d_1(\lambda), \dots, d_n(\lambda)), \quad d_1 | d_2 | \dots | d_n$$

- 这里 $P(\lambda)$ 、 $Q(\lambda)$ 是 $F[\lambda]$ 上的可逆矩阵。
- 因为 $\det(\lambda E - A)$ 不是零多项式, 所以对特征矩阵而言可以取 n 个非零不变因子, 其中允许出现 1。

提示: 为什么“对角化”还不够? 因为任意对角多项式并不能唯一表征等价类; 加入 $d_1 | d_2 | \dots | d_n$ 的整除链之后, 标准形才具有唯一性。

四、怎样从原特征矩阵读出标准形? ——行列式因子

问题链 3: 标准形对角元从哪里来?

直接做多项式初等变换可能计算繁琐



能否只用于子式信息确定标准形?



定义 $D_k(\lambda)$: 特征矩阵所有 k 阶子式的最大公因式 (首一)



这些 D_k 在等价变换下保持不变



若标准形为 $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, 则 $D_k = d_1 d_2 \cdots d_k$



于是可由 D_k 反推出 d_k

$$D_0(\lambda) = 1, \quad D_k(\lambda) = \gcd\{\text{全部 } k \text{ 阶子式}\}$$

$$D_k = d_1 d_2 \cdots d_k, \quad d_k = D_k / D_{k-1}$$

结构意义

$D_1, D_2, \dots, D_n$ 像“逐层扫描器”： D_1 看全部元素的公因式， D_2 看全部二阶子式的公因式，直到 $D_n = \det(\lambda I - A)$ = 特征多项式。它们把大量子式信息压缩成一条整除链。

五、节点二：不变因子——怎样把标准形变成相似不变量？

问题链 4：由行列式因子到不变因子

已知 $D_0 = 1, D_1, \dots, D_n$



定义 $d_k = D_k / D_{k-1}$



得到 $d_1 | d_2 | \dots | d_n$



这些 d_k 正是 Smith 标准形的对角元



因此 $d_1, \dots, d_n$ 完全由 A 决定，并在相似下不变



不变因子组完全刻画矩阵的相似类

$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$ —— A 的不变因子

- 最大的不变因子 $d_n(\lambda)$ 是矩阵 A 的最小多项式。
- 全部不变因子的乘积是特征多项式： $d_1 d_2 \dots d_n = \det(\lambda I - A)$ 。
- 矩阵 A, B 相似，当且仅当它们有相同的不变因子组。

六、节点三：初等因子——为什么还要把不变因子继续分解？

问题链 5：从整除链到不可约幂

不变因子仍是较大的多项式，结构信息混在一起



利用第一章的一元多项式唯一分解



把每个非单位不变因子分解为首一不可约多项式的幂



把出现的每一个 $p(\lambda)^e$ 单独记录



这些不可约幂称为初等因子



初等因子是构成相似结构的“最小结构颗粒”

$$d_i(\lambda) = \prod_j p_j(\lambda)^{e_{ij}} \rightarrow \text{初等因子 } p_j(\lambda)^{e_{ij}}$$

跨章连接

这里直接调用第一章“唯一因式分解”的知识。第八章把“多项式分解”重新解释为“矩阵相似结构分解”：不可约多项式决定谱的类型，幂指数决定链的长度。

七、节点四：初等因子怎样变成 Jordan 块？

问题链 6：在线性分裂情形建立一一对应

若特征多项式在 F 的每个不可约多项式都是一次因子 $\lambda - \lambda_0$



于是初等因子具有形式 $(\lambda - \lambda_0)^r$



这个指数 r 应如何解释？



它恰好对应一个 r 阶 Jordan 块 $J_r(\lambda_0)$



因此“初等因子 $\leftrightarrow$ Jordan 块”是一一对应

$$(\lambda - \lambda_0)^r \leftrightarrow J_r(\lambda_0)$$

$$J_r(\lambda_0) = \lambda_0 I_r + N_r, \quad N_r \text{ 的超对角线上为 } 1$$

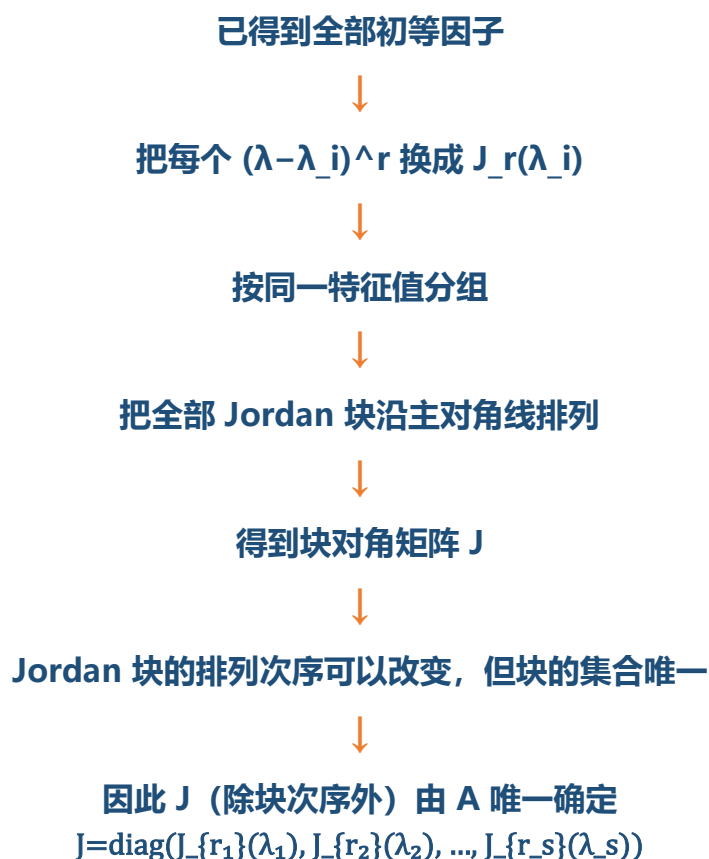
- 同一特征值 λ_0 有几个初等因子，就有几个对应的 Jordan 块。
- 这些初等因子的指数之和，等于 λ_0 的代数重数。
- 最大的指数，等于最小多项式中 $(\lambda - \lambda_0)$ 的指数。

重要适用条件

只有当特征多项式在所讨论的数域 F 分解成一次因式方幂乘积时，才可以把所有初等因子都写成 $(\lambda - \lambda_0)^r$ ，并得到通常意义下的 Jordan 标准形。若不分裂，应保留一般不可约多项式对应的有理标准形/Frobenius 结构。

八、节点五：Jordan 块怎样组装成 Jordan 标准形？

问题链 7：从局部结构到整体标准代表



完整结论

特征矩阵标准形 $\rightarrow$ 不变因子 $\rightarrow$ 初等因子 $\rightarrow$ Jordan 块 $\rightarrow$ Jordan 标准形，是一条可逆的结构链。它不仅“算出 J ”，而且解释了为什么 Jordan 块的大小和个数是矩阵相似类的本质不变量。

九、整章压缩成一套可执行算法

步骤	要解决的问题	核心对象/运算	输出
1	怎样把相似问题代数化？	构造 $\lambda E - A$	特征矩阵
2	怎样获得标准形？	在 $P[\lambda]$ 上作等价变换，或计算各阶子式 最大公因式	Smith 标准形 / 行列式因子
3	怎样提取整除链？	$d_k = D_k / D_{k-1}$	不变因子 d_k
4	怎样拆成最小结构信息？	对非单位 d_k 作不可约因式分解	初等因子 $p(\lambda)^e$
5	怎样识别 Jordan 块？	若 $p(\lambda) = \lambda - \lambda_i$ ，则 $p^e \leftrightarrow J_e(\lambda_i)$	Jordan 块
6	怎样得到整体标准形？	把所有 Jordan 块作块对角拼接	Jordan 标准形 J

十、完整示例：从特征矩阵到 Jordan 标准形

例题

设 $A = [[2,1,0],[0,2,0],[0,0,2]]$ 。请不用“直接看出 Jordan 块”的方式，而沿本章问题链由 $\lambda I - A$ 推导其 Jordan 标准形。

步骤 1：构造特征矩阵

$$\lambda I - A = [[\lambda - 2, -1, 0], [0, \lambda - 2, 0], [0, 0, \lambda - 2]]$$

步骤 2：求行列式因子

- D_1 ：全部 1 阶子式（即全部元素）的最大公因式。因为矩阵中出现常数 -1 ，所以 $D_1=1$ 。
- D_2 ：全部 2 阶子式的最大公因式。可验证所有非零 2 阶子式都被 $\lambda-2$ 整除，且存在只含一次 $\lambda-2$ 的子式，因此 $D_2=\lambda-2$ 。
- $D_3=\det(\lambda I - A)=(\lambda-2)^3$ 。

步骤 3：求不变因子

$$d_1=D_1=1$$

$$d_2=D_2/D_1=\lambda-2$$

$$d_3=D_3/D_2=(\lambda-2)^2$$

Smith 标准形: $\text{diag}(1, \lambda-2, (\lambda-2)^2)$

步骤 4：求初等因子

非单位不变因子: $\lambda-2, (\lambda-2)^2$

初等因子: $(\lambda-2), (\lambda-2)^2$

步骤 5：转成 Jordan 块并组装

$(\lambda-2)^2 \leftrightarrow J_2(2), (\lambda-2) \leftrightarrow J_1(2)$

$J = J_2(2) \oplus J_1(2)$

由结构反读信息

特征值 2 的代数重数为 3；Jordan 块个数为 2；最大块阶数为 2；最小多项式为 $(\lambda-2)^2$ ；因此 A 不可对角化。

十一、常见错误与反例节点

错误节点	错误判断	智能体应引导学生修正
误区 1	只知道特征多项式就能确定 Jordan 形。	反例: $\text{diag}(2,2)$ 与 $J_2(2)$ 特征多项式相同，但不相似。还需要块结构信息。
误区 2	特征值及其代数重数相同就一定相似。	错误。Jordan 块大小可能不同；不变因子/初等因子才能完整判定相似。
误区 3	初等因子就是特征多项式的不可约因子。	不够。必须保留幂指数，并且同一个不可约多项式可能出现多个初等因子。
误区 4	一个特征值只对应一个 Jordan 块。	错误。其 Jordan 块个数等于相应初等因子个数（也等于几何重数）。
误区 5	最大 Jordan 块大小等于代数重数。	只有在该特征值仅有一个 Jordan 块时才成立。通常最大块大小由最小多项式中的指数决定。

十二、课程知识图谱中的跨章连接

第一章：F[λ] 中整除、最大公因式、不可约分解



第二章：行列式与子式

↓

第三章：秩与线性方程组

↓

第七章：特征值、特征向量与相似

↓

第八章：特征矩阵标准形 → 不变因子 → 初等因子 → Jordan 标准形

课程结构意义

第八章是前七章知识的一次“结构汇合”：第一章提供多项式因式分解工具，第二章提供子式和行列式，第三章提供秩思想，第七章提供相似与特征结构；这些知识最终在 Jordan 理论中统一。

十三、整章最终结论：用一句话概括

核心结论

给定矩阵 A ，先研究特征矩阵 $\lambda I - A$ 在 $F[\lambda]$ 上的 Smith 标准形；由行列式因子得到不变因子，再将不变因子分解为初等因子；当特征多项式在 F 上完全分裂时，每个初等因子 $(\lambda - \lambda_0)^{r_i}$ 唯一对应一个 Jordan 块 $J_{r_i}(\lambda_0)$ ，把所有 Jordan 块组合起来便得到 A 的 Jordan 标准形。

特征矩阵标准形 → 不变因子 → 初等因子 → Jordan 块 → Jordan 标准形

—— 从 “多项式矩阵的整除结构” 看见 “线性变换的相似结构” ——