

欧几里得空间：计算与证明策略讲义

主线：内积结构 $\rightarrow$ 标准正交基 $\rightarrow$ 正交变换 $\rightarrow$ 正交分解 $\rightarrow$ 实对称矩阵正交对角化

本章统一思想

欧几里得空间比一般线性空间多了“内积”，因此可谈长度、夹角、正交、投影。解决问题时，应尽量把任意基换成标准正交基。

一旦选定标准正交基：向量内积变成坐标的点积；正交变换变成正交矩阵；子空间正交补变成齐次方程组；实对称算子的研究变成实对称矩阵的正交对角化。

核心策略：抽象对象 $\rightarrow$ 标准正交坐标 $\rightarrow$ 矩阵/方程组 $\rightarrow$ 已知算法 $\rightarrow$ 回译为空间结论。

一、本章知识之间的结构关系

对象	坐标化后的具体问题	主要工具
标准正交基	把一般基正交化、单位化	Gram-Schmidt 正交化
正交变换	标准正交基下矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I$	正交矩阵、行列式、特征值
W 的正交补	求满足 $(x, w) = 0$ 的所有 x	齐次方程组、秩-零度
实对称变换/矩阵	求 $Q^T A Q = D$	对称矩阵正交对角化定理、特征子空间正交性
二次型	$x^T A x$ 在正交替换 $x = Qy$ 下化为 $y^T D y$	特征值符号判断类型

1. 标准正交基的性质与施密特正交化策略

1.1 标准正交基的核心性质

设 V 是 n 维欧几里得空间， $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为标准正交基，即 $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ 。它的优势在于把内积结构完全“坐标化”。

- 若 $\alpha = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ，则 $x_i = (\alpha, e_i)$ 。因此坐标无需解线性方程组，直接做内积即可。
- 若 α, β 的坐标分别为 x, y ，则 $(\alpha, \beta) = x^T y$ ， $\|\alpha\|^2 = x^T x$ 。
- 不同标准正交基之间的过渡矩阵必为正交矩阵。
- 在标准正交基下，线性变换保持内积当且仅当其矩阵为正交矩阵。

施密特正交化：四步算法

输入：线性无关组 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ；输出：张成同一子空间的标准正交组 $e_1, \dots, e_k$ 。

第 1 步 正交化： $\beta_1 = \alpha_1$ ； $\beta_2 = \alpha_2 - \text{proj}_{\{\beta_1\}} \alpha_2$ ；一般地 $\beta_k = \alpha_k - \sum_{j < k} ((\alpha_k, \beta_j) / (\beta_j, \beta_j)) \beta_j$ 。

第 2 步 检查：每一步得到的 $\beta_i \neq 0$ （前提是原向量组线性无关）。

第 3 步 单位化： $e_i = \beta_i / \|\beta_i\|$ 。

第 4 步 结论： $\text{span}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ ，且 $\{e_i\}$ 为标准正交组；若 $k=n$ ，则得到 V 的标准正交基。

例 1 在 $\mathbb{R}^3$ 中由给定基构造标准正交基

设 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$ ， $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$ ， $\alpha_3 = (0, 1, 1)^T$ 。求由此基经施密特正交化得到的一组标准正交基。

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 0)^T$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - ((\alpha_2, \beta_1) / (\beta_1, \beta_1)) \beta_1 = (1, 0, 1)^T - (1/2)(1, 1, 0)^T = (1/2, -1/2, 1)^T$$

为简化计算，可将 β_2 同倍放大为 $(1, -1, 2)^T$ 。再计算 β_3 ：

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \alpha_3 - ((\alpha_3, \beta_1) / (\beta_1, \beta_1)) \beta_1 - ((\alpha_3, \beta_2) / (\beta_2, \beta_2)) \beta_2 \\ &= (0, 1, 1)^T - (1/2)(1, 1, 0)^T - (1/6)(1, -1, 2)^T = (-2/3, 2/3, 2/3)^T \end{aligned}$$

可取 $\beta_3 = (-1, 1, 1)^T$ 。单位化得到

$$e_1 = (1/\sqrt{2})(1, 1, 0)^T, \quad e_2 = (1/\sqrt{6})(1, -1, 2)^T, \quad e_3 = (1/\sqrt{3})(-1, 1, 1)^T.$$

策略提示：施密特过程中允许对非零 β_i 作非零倍数伸缩，这能显著简化分数运算。

例 2 在多项式空间中做施密特正交化

在 $P_2(\mathbb{R})$ 上取内积 $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ 。对 $1, t, t^2$ 施密特正交化，求一组标准正交基。

$$\beta_1 = 1, \quad \|\beta_1\|^2 = 1$$

$$\beta_2 = t - (t, 1) \cdot 1 = t - 1/2, \quad \|\beta_2\|^2 = 1/12$$

$$\beta_3 = t^2 - (t^2, 1) \cdot 1 - ((t^2, \beta_2) / (\beta_2, \beta_2)) \beta_2 = t^2 - t + 1/6$$

计算得 $\|\beta_3\|^2 = 1/180$ ，因此可取

$$e_1 = 1, \quad e_2 = \sqrt{12}(t - 1/2), \quad e_3 = \sqrt{180}(t^2 - t + 1/6).$$

注：施密特正交化不是 $\mathbb{R}^n$ 的专属算法；只要有内积，就可以在抽象欧几里得空间中执行。

2. 正交变换的矩阵计算、分类与证明策略

2.1 从正交变换到正交矩阵

线性变换 $\sigma: V \rightarrow V$ 称为正交变换，是指对任意 $\alpha, \beta \in V$ 都有 $(\sigma\alpha, \sigma\beta) = (\alpha, \beta)$ 。选定标准正交基后，设 σ 的矩阵为 Q ，则

$$(Qx)^T(Qy) = x^T y \text{ 对所有 } x, y \text{ 成立} \Leftrightarrow Q^T Q = I.$$

因此，正交变换与正交矩阵在标准正交基下完全对应。

正交变换的计算与证明策略

计算矩阵：先取标准正交基 $e_1, \dots, e_n$ ，求 $\sigma(e_i)$ 的坐标并按列排成 Q ；再检查 $Q^T Q = I$ 。

证明是正交变换：可直接从定义证明保持内积；更常用的是选标准正交基，证明矩阵 Q 满足 $Q^T Q = I$ 。

证明不是正交变换：找一个向量长度不保持，或证明 $Q^T Q \neq I$ 即可。

常用结论： $Q^{-1} = Q^T$ ； $|\det Q| = 1$ ；列向量与行向量均构成 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基。

2.2 分类思路

按行列式可把正交变换分为第一类与第二类。在 $\mathbb{R}^2$ 中，这一分类尤其直观：

- 第一类正交变换： $\det Q = 1$ ，保定向。在 $\mathbb{R}^2$ 中就是旋转，可写成 $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 。
- 第二类正交变换： $\det Q = -1$ ，反定向。在 $\mathbb{R}^2$ 中就是关于过原点某条直线的反射。

在一般 $\mathbb{R}^n$ 中，实正交矩阵可在另一组标准正交基下化为由二维旋转块 $R(\theta)$ 与一维块 1、-1 组成的分块对角形。这揭示了高维正交变换由“旋转 + 可能的反射”构成。若所选基不是标准正交基，则不能直接用 $Q^T Q = I$ ，而应结合该基的 Gram 矩阵 G 使用 $Q^T G Q = G$ 。

例 3 由变换求矩阵并分类

在 $\mathbb{R}^2$ 标准正交基下，设 $\sigma(x, y) = ((x - \sqrt{3}y)/2, (\sqrt{3}x + y)/2)$ 。求 σ 的矩阵并分类。

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad Q^T Q = I, \quad \det Q = 1.$$

所以 σ 是正交变换，且为逆时针旋转 $\theta = \pi/3$ 的旋转变换。

例 4 正交变换的证明：利用标准正交基像

设 σ 是欧几里得空间 V 上的线性变换， $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是一组标准正交基。证明： σ 为正交变换 $\Leftrightarrow \{\sigma(e_1), \dots, \sigma(e_n)\}$ 仍为标准正交基。

证明策略：

- “ $\Rightarrow$ ”：由保持内积， $(\sigma(e_i), \sigma(e_j)) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ，故像向量组标准正交。
- “ $\Leftarrow$ ”：任取 $\alpha = \sum x_i e_i$ ， $\beta = \sum y_i e_i$ ，则 $\sigma\alpha = \sum x_i \sigma(e_i)$ ， $\sigma\beta = \sum y_i \sigma(e_i)$ 。利用像向量组标准正交，得到 $(\sigma\alpha, \sigma\beta) = \sum x_i y_i = (\alpha, \beta)$ 。

矩阵化理解：命题等价于“ Q 的列向量为标准正交组 $\Leftrightarrow Q^T Q = I$ ”。

3. 子空间的正交补与欧几里得空间的正交分解策略

3.1 正交补的计算

设 W 是 V 的子空间，定义 $W^\perp = \{x \in V : (x, w) = 0 \text{ 对所有 } w \in W\}$ 。若 $W = \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ ，则只需对生成元列出正交条件：

$$x \in W^\perp \Leftrightarrow (x, \alpha_1) = \dots = (x, \alpha_r) = 0.$$

在 $\mathbb{R}^n$ 标准内积下，将 α_i 作为矩阵 A 的列，则 $W^\perp = N(A^T)$ 。于是“求正交补”被转化为“解齐次线性方程组”。证明 $V = W \oplus W^\perp$ 时，可用两步：先由 $x \in W \cap W^\perp$ 得 $(x, x) = 0$ ，从而交为 $\{0\}$ ；再由 $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ 得到两者之和为整个 V 。

正交补与正交分解：标准流程

求 $W^\perp$ ：先取 W 的一组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ；令未知向量 x ；写出 $(x, \alpha_i) = 0$ ；化为齐次方程组；求基础解系，即为 $W^\perp$ 的一组基。

维数检查： $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ 。若结果不满足，应回查秩或方程。

正交分解： $V = W \oplus W^\perp$ 。对任意 α ，先求其在 W 上的正交投影 α_W ，再令 $\alpha_{W^\perp} = \alpha - \alpha_W$ 。

若 $\{e_1, \dots, e_r\}$ 是 W 的标准正交基，则 $\alpha_W = \sum (\alpha, e_i) e_i$ ；这是最简洁的分解公式。

例 5 求子空间的正交补

在 R^4 中， $W = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2\}$ ，其中 $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)^T$ ， $\alpha_2 = (0, 1, 1, 0)^T$ 。求 $W^\perp$ 的维数与一组基。

令 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 。正交条件为

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0。$$

令 $x_2 = s$ ， $x_4 = t$ ，则 $x = (-s, s, -s, t)^T = s(-1, 1, -1, 0)^T + t(0, 0, 0, 1)^T$ 。

$$W^\perp = \text{span}\{(-1, 1, -1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T\}, \quad \dim W^\perp = 2。$$

维数核对： $\dim W = 2$ ， $\dim W^\perp = 2$ ，二者之和为 4，符合 $\dim W + \dim W^\perp = \dim R^4$ 。

例 6 求一个向量相对于 $W \oplus W^\perp$ 的正交分解

在 R^3 中， $W = \text{span}\{(1, 1, 0)^T, (1, -1, 0)^T\}$ ，求 $\alpha = (2, 1, 3)^T$ 的正交分解 $\alpha = \alpha_W + \alpha_{W^\perp}$ 。

先将 W 的基单位化： $e_1 = (1/\sqrt{2})(1, 1, 0)^T$ ， $e_2 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0)^T$ 。

$$\alpha_W = (\alpha, e_1)e_1 + (\alpha, e_2)e_2 = (2, 1, 0)^T。$$

$$\alpha_{W^\perp} = \alpha - \alpha_W = (0, 0, 3)^T。$$

所以 $\alpha = (2, 1, 0)^T + (0, 0, 3)^T$ ，前者属于 W ，后者属于 $W^\perp$ 。

4. 实对称矩阵的正交对角化及其在二次型中的应用

4.1 计算策略：特征值 $\rightarrow$ 正交特征向量 $\rightarrow$ 正交矩阵

实对称矩阵 A 的核心优势是谱定理：所有特征值均为实数；不同特征值的特征向量正交；存在正交矩阵 Q 使 $Q^T A Q = D$ 为对角矩阵。

实对称矩阵正交对角化：五步算法

第 1 步 求特征多项式 $\det(\lambda I - A)$ ，得到全部实特征值。

第 2 步 对每个 λ 求特征子空间 $V_\lambda = N(A - \lambda I)$ ，记录其维数与一组基。

第 3 步 不同特征值的特征子空间自动正交；若某个特征子空间维数大于 1，只需在该子空间内部做施密特正交化。

第 4 步 将所有特征向量单位化，按列排成正交矩阵 Q ；相应特征值按同样顺序排成 D 。

第 5 步 验证 $Q^T Q = I$ ， $Q^T A Q = D$ 。列的次序可交换，但必须与 D 的对角元同步。

例 7 实对称矩阵的正交对角化

设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 。求正交矩阵 Q ，使 $Q^T A Q$ 为对角矩阵，并写出各特征子空间的维数与基。特征值为 $\lambda=1, 3$ ，其中 $\lambda=3$ 的代数重数为 2。

$$V_1 = \text{span}\{(1, -1, 0)^T\}, \dim V_1 = 1。$$

$$V_3 = \text{span}\{(1, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}, \dim V_3 = 2。$$

三向量两两正交，单位化得

$$q_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0)^T, \quad q_2 = (1/\sqrt{2})(1, 1, 0)^T, \quad q_3 = (0, 0, 1)^T。$$

$$Q = [q_1 \ q_2 \ q_3], \quad Q^T A Q = \text{diag}(1, 3, 3)。$$

结构提示：对称矩阵出现重特征值时，不必担心“特征向量不足”；谱定理保证每个特征值的几何重数等于代数重数。

4.2 在二次型化标准形与分类中的应用

对实二次型 $f(x) = x^T A x$ ($A = A^T$)，取正交替换 $x = Qy$ ，则

$$f = x^T A x = y^T (Q^T A Q) y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2。$$

因此，实对称矩阵的特征值就是通过正交变换所得标准形的系数。由特征值的正、负、零个数，可以直接判断二次型的秩、正负惯性指数以及类型。

二次型类型的特征值判据

类型	特征值条件	标准形特征
正定	所有 $\lambda_i > 0$	全为正平方项
负定	所有 $\lambda_i < 0$	全为负平方项
半正定	$\lambda_i \geq 0$ ，且至少一个 $\lambda_i = 0$	无负平方项且退化
半负定	$\lambda_i \leq 0$ ，且至少一个 $\lambda_i = 0$	无正平方项且退化
不定	既有正特征值又有负特征值	正、负平方项同时出现

例 8 利用正交对角化化二次型为标准形并分类

二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$ 。用正交变换化为标准形，并判断类型。

其矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，正是例 7 中的对称矩阵。取同样的正交矩阵 Q ，令 $x = Qy$ ，则

$$f = y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2。$$

三个特征值均为正，因此 f 为正定二次型；秩为 3，正惯性指数为 3，负惯性指数为 0。

策略优势：与一般配方法相比，正交替换不仅化为标准形，还保持长度与夹角，因此特别适合需要几何解释、主轴变换或正定性判断的问题。

4.3 实对称矩阵相关证明的常用策略

- 证明不同特征值的特征向量正交：设 $A\alpha = \lambda\alpha$ ， $A\beta = \mu\beta$ ，利用 $A^T = A$ 得 $(A\alpha, \beta) = (\alpha, A\beta)$ ，从而 $(\lambda - \mu)(\alpha, \beta) = 0$ 。

- 证明可以正交对角化：先按特征值分解为特征子空间；不同特征子空间彼此正交；每个特征子空间内选标准正交基；把这些基合并即得整个空间的一组标准正交特征基。
- 证明二次型类型：优先把问题转为对称矩阵特征值符号；正交对角化后类型一目了然。

5. 一页式策略总结与常见错误

四类题目的统一算法模板

标准正交基：线性无关组 $\rightarrow$ 施密特正交化 $\rightarrow$ 单位化 $\rightarrow$ 用内积检查。

正交变换：选标准正交基 $\rightarrow$ 求矩阵 $Q \rightarrow$ 检查 $Q^T Q = I \rightarrow$ 用 $\det Q$ 、二维旋转块等分类。

正交补/正交分解：取 W 的基 $\rightarrow$ 写正交方程 $\rightarrow$ 解齐次方程组得 $W^\perp \rightarrow$ 用投影公式分解 α 。

实对称矩阵：求特征值 $\rightarrow$ 求各特征子空间 $\rightarrow$ 子空间内部施密特 $\rightarrow$ 单位化 $\rightarrow Q^T A Q = D \rightarrow$ 读出二次型标准形与类型。

常见错误与纠正

- 把“正交”与“标准正交”混为一谈：正交只要求两两内积为 0；标准正交还要求每个向量长度为 1。
- 施密特正交化时忘记除以 (β_i, β_i) ：只有 β_i 已单位化时才可直接写 $(\alpha, \beta_i)\beta_i$ 。
- 在任意基下直接用 $Q^T Q = I$ 判断正交变换： $Q^T Q = I$ 这一简洁判据要求所选基是标准正交基。
- 求 $W^\perp$ 时只与一个向量正交：必须与 W 的一组生成元（最好是一组基）都正交。
- 把 $V = W + W^\perp$ 当作普通和，不证明交为 $\mathbf{0}$ ：正交性直接给出 $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$ ，故这是直和。
- 对实对称矩阵求出特征向量后直接拼 Q ：同一重特征值下的特征向量未必正交，需要在特征子空间内部施密特正交化并单位化。
- 二次型正交化后只写标准形，不判断类型：应同时读出秩、正负惯性指数，并据特征值符号分类。

最终记忆口令

施密特：减去投影，再单位化。

正交变换：在标准正交基下，矩阵满足 $Q^T Q = I$ 。

正交补：把“与子空间所有向量正交”转化为齐次方程组。

正交分解： $\alpha = \text{proj}_W \alpha + (\alpha - \text{proj}_W \alpha)$ 。

实对称矩阵与二次型：实对称矩阵可正交对角化；正交化后，特征值的符号直接决定二次型类型。