

线性空间一章的核心计算与证明策略

——维数与基 · 极大线性无关组与秩 · 子空间的交、和与直和分解

本讲义的统一思想

线性空间中的对象可能是多项式、矩阵、函数或其他抽象向量，但“线性关系”本质上都可借助一组基转化为坐标向量的线性关系。

因此本章大量问题可以统一到三件事：生成表示、坐标化、矩阵秩/线性方程组。

建议学生形成固定思维链：抽象空间 $\rightarrow$ 生成元/基 $\rightarrow$ 坐标矩阵 $\rightarrow$ 初等行变换 $\rightarrow$ 秩、极大无关组、方程组与维数。

一、全章统一视角：把“抽象线性空间问题”转化为“矩阵问题”

线性空间章节最容易出现的学习困难，是面对不同对象时不断“换方法”：多项式用一种方法，矩阵用另一种方法，函数又用第三种方法。事实上，只要选定基，所有有限维线性空间都可以用坐标描述，绝大多数计算最终都落到向量组的线性相关性、矩阵的秩和线性方程组。

核心母策略：三步降维

第一步：生成化——把空间或子空间写成若干向量的张成（生成子空间）。

第二步：坐标化——选定基，把抽象向量写成坐标列向量。

第三步：矩阵化——把坐标列排成矩阵，用初等变换、秩和方程组处理。

抽象对象 — 选基/展开 —► 坐标向量 — 组矩阵 —► rank、初等行变换、 $Ax=b$

下面三部分分别是这一母策略在“维数与基”“抽象向量组的极大无关组”“子空间的交与和及直和分解”中的具体化。

二、线性空间维数、基的计算策略

目标：给定一个有限维线性空间或子空间，求其一组基并确定维数。最稳定的策略不是直接“猜基”，而是先把空间写成一个生成子空间，再从生成元中抽取极大线性无关组。

步骤	核心操作	转化对象	最终工具
1	将空间写成 $W=\text{span}\{\alpha_1,\dots,\alpha_s\}$	空间 $\rightarrow$ 生成元	展开、参数化
2	把生成元相对一组方便的基写成坐标列	抽象向量 $\rightarrow$ 坐标向量	坐标表示
3	以坐标列为列组成矩阵 A	向量组 $\rightarrow$ 矩阵	列秩
4	对 A 作初等行变换，找主元列	生成元 $\rightarrow$ 极大无关组	初等行变换 / 秩
5	原生成元中对应主元列的向量构成一组基	极大无关组 $\rightarrow$ 基	$\dim W = \text{rank}(A)$

必须强调的细节

初等行变换可以用于判断列向量之间的线性关系和找主元位置，但最后取基时，要回到“原矩阵”的相应列对应的生成元。

若空间由线性约束定义，如 $W=\{x:Bx=0\}$ ，应先解齐次方程组，把通解写成参数线性组合，从而得到生成元，再执行上述流程。

“生成元个数”不等于“维数”；维数等于生成元组的秩。

例 1: 多项式子空间的基与维数

设 $P_3[x]$ 中的子空间

$$W = \text{span}\{p_1, p_2, p_3, p_4\},$$

$$p_1=1+x+x^2, p_2=1+2x+3x^2, p_3=2+3x+4x^2, p_4=x+x^2+x^3.$$

求 W 的一组基及 $\dim W$ 。

【策略应用】取 $P_3[x]$ 的标准基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 。四个生成元的坐标分别为

$$[p_1]=(1,1,1,0)^T, [p_2]=(1,2,3,0)^T, [p_3]=(2,3,4,0)^T, [p_4]=(0,1,1,1)^T.$$

以这些坐标为列构造矩阵

$$A = [[1,1,2,0],[1,2,3,1],[1,3,4,1],[0,0,0,1]].$$

对 A 作初等行变换可得 $\text{rank}(A)=3$, 主元列可取第 1、2、4 列; 第 3 列满足 $p_3=p_1+p_2$ 。于是

$$\{p_1, p_2, p_4\} \text{ 是 } W \text{ 的一组基, } \dim W=3.$$

【策略点评】这里最重要的不是计算, 而是认识到“多项式的线性关系”完全等价于“系数坐标列的线性关系”。

例 2: 由线性约束定义的子空间

设

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

求 W 的一组基及维数。

【第一步: 先生成化】令 $x_2=s, x_3=t$, 则 $x_1=-s-t, x_4=-s-t$, 因此

$$x = s(-1, 1, 0, -1)^T + t(-1, 0, 1, -1)^T.$$

于是

$$W = \text{span}\{(-1, 1, 0, -1)^T, (-1, 0, 1, -1)^T\}.$$

这两个生成元显然不成比例, 线性无关, 所以已经是极大无关组。故

$$\dim W=2, \text{ 且上述两个向量构成 } W \text{ 的一组基}.$$

第一类问题的口令

“求空间的基和维数” → 先问: 我能不能把它写成 $\text{span}\{\dots\}$?

若能: 生成元坐标化 → 组列矩阵 → 求秩与主元列。

若不能: 通常先解约束方程, 把空间参数化成若干自由参数对应的生成元。

三、线性空间中向量组的极大线性无关组与秩

目标：给定抽象线性空间 V 中的向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ ，求其秩与一个极大线性无关组。核心不是对抽象对象直接消元，而是“取定一组基，把抽象线性关系变成坐标的线性关系”。

基本定理（策略依据）

设 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组基， α_i 在此基下的坐标为 a_i 。则 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 与 $a_1, \dots, a_s$ 具有完全相同的线性关系。因此 $\text{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} = \text{rank}\{a_1, \dots, a_s\}$ 。

原向量组中的极大无关组，恰对应坐标矩阵中的主元列。

步骤	核心操作	转化对象	最终工具
1	选定 V 的一组基 $E = \{e_1, \dots, e_n\}$	抽象空间 $\rightarrow$ 坐标系	基
2	求每个 α_i 的坐标 $[\alpha_i]_E$	抽象向量 $\rightarrow$ 数列	展开系数
3	构造坐标矩阵 $A = ([\alpha_1]_E, \dots, [\alpha_s]_E)$	抽象向量组 $\rightarrow$ 具体列向量组	矩阵
4	对 A 行化简，求 $\text{rank}(A)$ 和主元列	线性关系 $\rightarrow$ 数值关系	初等行变换
5	回到原向量组，取主元列对应的 α_i	坐标结论 $\rightarrow$ 抽象结论	极大无关组

例 3：多项式向量组的极大无关组

在 $P_2[x]$ 中给定

$$\alpha_1 = 1+x, \alpha_2 = x+x^2, \alpha_3 = 1+2x+x^2, \alpha_4 = 2+3x+x^2.$$

求该向量组的秩和一个极大线性无关组。

【坐标化】取基 $E = \{1, x, x^2\}$ ，则

$$[\alpha_1]_E = (1, 1, 0)^T, [\alpha_2]_E = (0, 1, 1)^T, [\alpha_3]_E = (1, 2, 1)^T, [\alpha_4]_E = (2, 3, 1)^T.$$

注意 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ ，因此坐标矩阵的秩为 2。第 1、2 列可作主元列，于是

$$\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 2, \{\alpha_1, \alpha_2\} \text{ 是一个极大线性无关组。}$$

【迁移】若换成函数空间中的函数组，只要能在某组基下求出坐标，处理方式完全相同。

例 4：矩阵空间中的抽象向量组

在 $M_2(\mathbb{R})$ 中给定

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

求 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 的秩与一个极大线性无关组。

【选基】取 $M_2(\mathbb{R})$ 的标准基 $E = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 。则

$$[A_1]=(1,0,0,1)^T, [A_2]=(0,1,1,0)^T, [A_3]=(1,1,1,1)^T, [A_4]=(2,1,1,2)^T.$$

观察即得 $A_3=A_1+A_2$, $A_4=2A_1+A_2$, 故秩为 2, $\{A_1, A_2\}$ 是极大线性无关组。

【策略点评】矩阵在这里不是“矩阵运算对象”，而是 $M_2(\mathbb{R})$ 中的“向量”。一旦把四个矩阵按基展开，它们的线性相关性就变成 $\mathbb{R}^4$ 中列向量的相关性。

第二类问题的关键语言转换

“抽象向量组是否线性相关？” $\Leftrightarrow$ “它们的坐标列是否线性相关？”

“抽象向量组的秩是多少？” $\Leftrightarrow$ “坐标矩阵的秩是多少？”

“抽象向量组的极大无关组？” $\Leftrightarrow$ “坐标矩阵的主元列对应哪些原向量？”

四、线性子空间的交、和与直和的计算和证明策略

设 U, W 是有限维线性空间 V 的两个子空间。此类题目需要区分三个层次：先求 $U+W$ ，再求 $U \cap W$ ，最后判断 $U+W$ 是否为直和，并进一步讨论整个空间的直和分解。

(一) 求子空间的和 $U+W$

若 $U=\text{span}\{u_1, \dots, u_r\}$, $W=\text{span}\{w_1, \dots, w_s\}$, 则无需重新推导，直接有

$$U+W=\text{span}\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s\}.$$

因此求 $U+W$ 的基，本质上就是从“两个子空间基的并”中抽取极大无关组。将 u_i, w_j 坐标化并合并成一个矩阵，求主元列即可。

(二) 求子空间的交 $U \cap W$

交空间比和空间稍难，通用的方法是“同一个向量的两种表示相等”。若

$$x \in U \cap W, \text{ 令 } x = U_a \cdot a = W_b \cdot b,$$

其中 U_a 、 W_b 分别是由 U 、 W 的基向量坐标组成的矩阵，则需要解

$$U_a a - W_b b = 0, \text{ 即 } [U_a \quad -W_b] (a, b)^T = 0.$$

求出参数解后代回 $x = U_a a$ ，即得到 $U \cap W$ 的生成元，再抽取基。

交空间的另一条常用路线

若 U 、 W 是由线性方程定义的，例如 $U=\{x: A x=0\}$, $W=\{x: B x=0\}$, 那么 $U \cap W$ 同时满足两组约束，因此 $U \cap W = \{x: [A; B]x=0\}$ 。此时“求交”直接变成解一个合并后的齐次线性方程组。

(三) 证明是否为直和

“ $U+W$ 是直和”意味着每个 $x \in U+W$ 的分解 $x=u+w$ 是唯一的。常用判定条件有四种，它们本质等价：

- 交空间判据： $U \cap W = \{0\}$ 。这是最直接、最常用的判据。
- 维数判据： $\dim(U+W) = \dim U + \dim W$ 。
- 基拼接判据：若 U 、 W 的基合在一起仍线性无关，则 $U+W=U \oplus W$ 。
- 唯一分解判据： $u_1+w_1=u_2+w_2$ 推出 $u_1=u_2$ 、 $w_1=w_2$ 。

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

所以只要计算出交空间维数，就能快速判断是否为直和。

例 5：在 R^4 中求交、和并判断直和

设

$$U = \text{span}\{u_1 = (1, 0, 1, 0)^T, u_2 = (0, 1, 0, 1)^T\},$$

$$W = \text{span}\{w_1 = (1, 1, 1, 1)^T, w_2 = (1, -1, 1, -1)^T\}.$$

求 $U+W$ 、 $U \cap W$ ，并判断 $U+W$ 是否为直和。

【先观察结构】有 $w_1 = u_1 + u_2$ ， $w_2 = u_1 - u_2$ ，因此 $W \subset U$ ；反过来

$$u_1 = (w_1 + w_2)/2, \quad u_2 = (w_1 - w_2)/2,$$

故 $U=W$ 。于是

$$U+W=U=W, \quad U \cap W=U=W, \quad \dim(U+W)=2.$$

由于 $U \cap W \neq \{0\}$ ，所以 $U+W$ 不是直和。

【策略点评】该例提醒学生：虽然可以机械组矩阵，但应先做“结构观察”。一旦发现两组生成元可以互相表示，交、和以及直和判断立即完成。

例 6：求交空间并证明直和分解

在 $P_3[x]$ 中，令

$$U = \{p(x) : p(-x) = p(x)\}, \quad W = \{p(x) : p(-x) = -p(x)\}.$$

即 U 为偶多项式子空间， W 为奇多项式子空间。证明 $P_3[x] = U \oplus W$ ，并给出任意 $p(x)$ 的分解公式。

【先写生成形式】

$$U = \text{span}\{1, x^2\}, \quad W = \text{span}\{x, x^3\}.$$

两组基合并得到 $\{1, x, x^2, x^3\}$ ，恰为 $P_3[x]$ 的一组基，因此

$$P_3[x] = U + W, \quad \text{且 } \dim U + \dim W = 2 + 2 = 4 = \dim P_3[x].$$

同时 $U \cap W = \{0\}$: 一个多项式若既是偶函数又是奇函数, 则 $p(x) = -p(x)$, 所以 $p(x) = 0$ 。故

$$P_3[x] = U \oplus W.$$

对任意 $p(x) \in P_3[x]$, 其唯一分解为

$$p(x) = [p(x) + p(-x)]/2 + [p(x) - p(-x)]/2,$$

前一项属于 U , 后一项属于 W 。

【策略点评】这个例子不仅验证“交为零 + 和为整个空间”, 还让学生看到直和分解对应两个互补的结构成分, 并自然引出投影思想。

五、从“两个子空间的直和”拓展到“线性空间的直和分解”

当题目要求把整个空间 V 分解为若干子空间的直和时, 核心问题从“是否直和”进一步变成“如何构造互补子空间、如何保证分解唯一”。

1. 构造补空间：基扩充法

已知 $U \subset V$, 若要求寻找 W 使 $V = U \oplus W$, 可采用最稳定的“基扩充法”:

- 先取 U 的一组基 $\{u_1, \dots, u_r\}$ 。
- 把它扩充为 V 的一组基 $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_{n-r}\}$ 。
- 令 $W = \text{span}\{w_1, \dots, w_{n-r}\}$ 。

因为合并后的向量组是 V 的一组基, 所以 $V = U + W$; 又因为整组线性无关, $U \cap W = \{0\}$, 故 $V = U \oplus W$ 。

重要结论

有限维线性空间的任意子空间都存在补空间。

补空间通常不唯一; “直和分解”并不意味着补空间只有一个。

直和分解一旦固定, 向量分解就是唯一的, 这也是投影算子能够定义的代数基础。

2. 多个子空间的直和判定

对 $V_1, \dots, V_k$, 写 $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, 意味着每个 $v \in V$ 都能唯一表示为 $v = v_1 + \dots + v_k$ ($v_i \in V_i$)。常用判据是:

- 先证明 $V = V_1 + \dots + V_k$ (生成整个空间)。
- 再证明若 $v_1 + \dots + v_k = 0$, 则只能有 $v_1 = \dots = v_k = 0$ (唯一性)。
- 在有限维情形, 若各子空间基的并是 V 的一组基, 则立即得到直和分解。
- 若已知 $V = V_1 + \dots + V_k$ 且 $\dim V = \sum \dim V_i$, 也可推出该和为直和。

六、三类问题的统一“算法模板”

步骤	核心操作	转化对象	最终工具
A	求 W 的基、 $\dim W$	先写 $W=\text{span}\{\dots\}$	生成元坐标矩阵的秩与主元列
B	求抽象向量组的秩、极大无关组	先选 V 的基并求坐标	坐标矩阵的秩与主元列
C1	求 $U+W$	合并 U 、 W 的生成元	拼接矩阵求极大无关组
C2	求 $U\cap W$	令 $Ua=Wb$ 或合并约束	齐次方程组的解空间
C3	判断 $U+W$ 是否直和	求 $U\cap W$ 或比较维数	$U\cap W=\{0\}$ / 维数公式
C4	构造 $V=U\oplus W$	把 U 的基扩充成 V 的基	补基向量张成 W

一页式记忆框架

看到“基、维数”——找生成元，求秩。
看到“抽象向量组”——先选基，坐标化，再求秩。
看到“和空间”——把两组生成元合起来。
看到“交空间”——同一个向量写成两种表示，令它们相等。
看到“直和”——优先检查交是否为 $\{0\}$ ；若涉及整个空间，再检查和是否等于 V 。
看到“构造补空间”——对已知子空间的基做基扩充。

七、常见错误与纠正提示

常见错误	纠正提示
错误 1：把“生成组”直接当成“基”。	纠正：生成组还要检查线性无关性；基=线性无关的生成组。
错误 2：行化简后直接取行最简矩阵的列作为原向量组的极大无关组。	纠正：用行化简确定“主元列位置”，再回到原矩阵取相应原列。
错误 3：求抽象向量组线性关系时直接对多项式/矩阵“逐项消元”，步骤混乱。	纠正：固定基，统一转成坐标列，再做矩阵消元。
错误 4：认为 $U+W$ 的基就是 U 的基与 W 的基的简单合并。	纠正：合并后可能相关，必须再抽取极大线性无关组。
错误 5：只证明 $U\cap W=\{0\}$ 就写 $V=U\oplus W$ 。	纠正：若结论是整个 V 的直和分解，还必须证明 $V=U+W$ 。
错误 6：认为补空间唯一。	纠正：补空间通常有很多个；基扩充给出的是一种构造。

